MATRICES

Definición

Arreglo rectangular de números

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 2\times 3$$

Fila 1 Renglón 1

F 2 R 2

Columna 1 C2 C3

Dimensión

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 3\times 3$$

Elemento

fila

$$A = \left[a_{ij} \right]$$

Columna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRICES

Ejercicio

Hallar $A_{4\times 3} = \left(a_{ij}\right)$ tal que $a_{ij} = i + j - 2$

Clases de matrices

Matriz Fila

$$A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

Matriz Columna

$$A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

MATRICES

Clases de matrices

Matriz cuadrada $m = n$

Diagonal Secundaria

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

TRAZA $tr(A)$

Suma de los elementos de la diagonal principal

Ejemplo

$$tr(A) = 3$$

MATRICES

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRICES

MATRIZ DIAGONAL

$$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICES

MATRIZ NULA

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Rectángular

IGUALDAD DE MATRICES $a_{ij} = b_{ij}$

Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 & 3 & -2k_3 + 4k_2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & k_3 + 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar $k_1 + k_2 + k_3$ tal que $A = B$

Rep. $-\frac{5}{4}$

MATRICES

OPERACIONES

SUMA

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$ donde $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+(-1) & -1+0 & 1+1 \\ 1+(-2) & 2+1 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

PROPIEDADES

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+\bar{0}=A$
4. $A+(-A)=\bar{0}$

MATRICES

OPERACIONES

MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

$$\alpha A_{m\times n} = C_{m\times n} \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A = C = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(2) & -1(2) & 0(2) \\ 1(2) & 2(2) & 3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

MATRICES

OPERACIONES

MULTIPLICACIÓN ENTRE MATRICES

$$A_{m\times n}\,B_{n\times q}=C_{m\times q}$$

donde

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

(Fila) X (Columna)

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}_{2\times 3}\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$C_{2\times 3}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}-1 & 5 & 6\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

MATRICES

OPERACIONES

Multiplicación entre matrices

Ejercicios

1.-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.- Hallar “k” para que la matriz AB sea TRIANGULAR SUPERIOR

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ k & -k & 3 \\ -k^2/2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 1 \\ -k & -\frac{k^3}{3} & k^5 \\ -1 & -2k & 3 \end{bmatrix}$$

MATRICES

OPERACIONES

Multiplicación entre matrices

PROPIEDADES

1. $A(B+C)=AB+AC$
2. $AI=A$
3. $\alpha AB=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
4. $(AB)C=A(BC)$

MATRICES

Matriz Transpuesta

$$A^t = \left(a_{ji}\right)_{n\times m}$$

Cambiar fila por columna
o Columna por fila

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

PROPIEDADES

1. $\left(A^t\right)^t = A$
2. $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$
3. $\left(AB\right)^t = B^t A^t$

MATRICES

Matriz Simétrica

$$A^t = A_{n\times n} \qquad \boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

Matriz Antisimétrica

$$A^t = -A \qquad \boxed{a_{ij} = -a_{ji}} \qquad \boxed{a_{ii} = 0}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

MATRICES

Determinantes

POR MENORES

1- $A_{1\times 1} = \left[a_{11}\right] \Rightarrow |A| = a_{11}$

Ejemplo

$$A = \left[5\right] \qquad |A| = 5$$

2- $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = (2)(-1) - (-3)(4) = 10$$

MATRICES

Determinantes

3-

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{n=1}^{3} a_{in}A^{in} = \sum_{n=1}^{3} a_{nj}A^{nj}$$

Escoja cualquier fila o cualquier columna

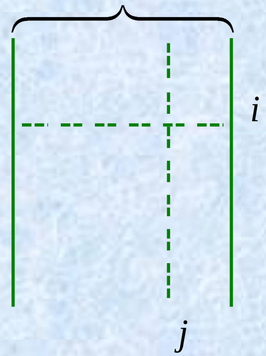
Por ejemplo: $i = 1$

$$\Rightarrow |A| = a_{11}A^{11} + a_{12}A^{12} + a_{13}A^{13}$$

Menor que se forma al anular la fila i y la columna j

COFACTOR

$$A^{ij} = (-1)^{i+j}$$



$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinantes

Ejemplo 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

+ - +

$$|A| = \quad = 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(20+2) - 1(12+1) + 4(6-5)$$

$$|A| = 2(22) - 1(13) + 4(1)$$

$$|A| = 44 - 13 + 4$$

$$|A| = 35$$

MATRICES

Determinantes

Ejemplo 2

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 5 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}$$

\+ - +

$$|A| = 1\begin{vmatrix}1 & 4\\ 5 & -1\end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$|A| = 1\left[(1)(-1) - (4)(5)\right] = -21$$

MATRICES
Determinantes

PROPIEDADES

1. $|AB| = |A||B|$

2. $|A^t| = |A|$

Otras Propiedades

1. Si una matriz es triangular superior, triangular inferior o diagonal, entonces su determinante es igual a la multiplicación de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -6$$

MATRICES

Determinantes

Otras Propiedades

2. Si una matriz tiene 2 filas o columnas iguales o múltiplos entonces su determinante es igual a "0".

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (1)(-6) - (3)(-2)$$

$$|A| = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICES

Determinantes

Otras Propiedades

3. Si se intercambian 2 filas o columnas en una matriz entonces su determinante cambia de signo.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \qquad |A| = 5 - 12 = -7$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad |B| = 12 - 5 = 7$$

MATRICES

Determinantes

.

Otras Propiedades

4.-Si a todos los elementos de una fila o columna de una matriz A los multiplicamos por una constante K diferente de cero, entonces el determinante de la nueva matriz es k veces el determinante de la matriz A

$$C = \begin{pmatrix} -1(2) & 3(2) \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 10 - 24 = -14$$

$$|C| = 2|A|$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

MATRICES

Determinantes

·

Ejercicio propuesto

Calcular el determinante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

MATRICES

Matriz Inversa

.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Matriz *no singular*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\hat{A}\right)^t}$$

$\widehat{A} \equiv$ **Matriz de Cofactores**

TEOREMA

A^{-1} ***existe si y sólo si*** $|A| \neq 0$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

1. $|A| = -7$

2. $$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +(-5) & -(4) \\ -(3) & +(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\widehat{A}\right)^t = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

MATRICES

Matriz Inversa

$A =$

1. $|A| = -11$

2. $\widehat{A} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{bmatrix}$

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} +(1) & -(-2) & +(-6) \\ -(2) & +(-4) & -(-1) \\ +(-6) & -(1) & +(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{-11}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 2 & -4 & -1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

MATRICES

Matriz Inversa

Ejercicio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Resp.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$
3. $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

MATRICES

Matriz Inversa

EJERCICIO

1. Hallar la matriz "X" tal que: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

Resp. $X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

2. Hallar los valores de "k" que hacen que la matriz A no tenga inversa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & k & 4/k \\ -1 & -3k & k \end{bmatrix}$$

Resp. **-2 y -6**